文章编号:1005-3085(2009)05-0890-05

两端固接的奇异弹性梁方程正解的存在唯一性*

杨东晖

(黑龙江东北煤炭矿山设备租赁公司，哈尔滨 150001)

摘 要: 利用锥上的混合单调算子不动点定理，本文研究了一类四阶奇异非线性微分方程的边值问题，即一类弹性梁方程问题。在力学上，该方程描述了两端固接的弹性梁的挠度。该文在非线性项是混合单调的条件下，得到了该方程正解的存在唯一性。作为主要结论的应用，我们给出了一个例子。

关键词: 边值问题；混合单调算子；不动点定理；弹性梁方程；唯一性

分类号: **AMS**(2000) 34B15; 34B18 **中图分类号**: O175.0 **文献标识码**: A

1 引言

在本文中，我们将研究下面四阶非线性奇异边值问题解的存在唯一性

$$\begin{cases} x''''(t) = \lambda f(t,x), \quad 0 < t < 1, \\ x(0) = x'(0) = x(1) = x'(1) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\lambda > 0$，$f \in C^1((0,1)\times(0,+\infty), (0,+\infty))$。非线性项 $f(t,x)$ 不仅在 $t=0$ 和/或 1 处可以有奇性，在 $x=0$ 处也可以有奇性。

在全文中我们约定：$f(t,x) = q(t)(g(x)+h(x))$，$t\in[0,1]$，其中 $g:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 是连续递增的函数，$h:(0,\infty)\to(0,\infty)$ 是连续递减的函数。

在许多的文献里，四阶两点边值问题受到极大的重视，如文献 [1-9]，这源于在弹性力学中的应用，边值问题 (1) 描述了两端刚性固定的弹性梁的挠度。在文献 [1] 中，马和 Tisdell 研究了问题 (1) 的特例形式 $f(t,x) = p(t)x^{\lambda}$ 及 $\lambda\in(0,1)$。在本文中，避免了混合单调序列的构造，而是运用这个混合单调算子的一个不动点定理[10,11]，考虑边值问题 (1) 正解的存在性与唯一性。

2 预备知识

令 P 是 Bananch 空间 E 的一个正规锥，并且 $e\in P$, $\|e\|\le 1$, $e\ne\theta$，定义

$$Q_e = \{y\in P \mid y\ne\theta,\ 存在常数\ m,\ M\ 使得\ me\le y\le Me\}.$$

定义 2.1[12] 假定 $A: Q_e\times Q_e\to Q_e$。称 A 是混合单调算子，如果 A 对于 x 是递增的，而对于 y 是递减的，即对任何 $y\in Q_e$，如果 $x_1\le x_2$ $(x_1,x_2\in Q_e)$ 则 $A(x_1,y)\le A(x_2,y)$；对

收稿日期: 2008-04-14. **作者简介**: 杨东晖 (1969年2月生)，女，硕士，高级工程师. 研究方向：结构工程.
***基金项目**: 国家自然科学基金 (10571021).

任何 $x \in Q_e$，如果 $y_1 \le y_2$ $(y_1, y_2 \in Q_e)$ 则 $A(x, y_1) \ge A(x, y_2)$；称 y^* 是 A 的一个不动点，如果 $A(y^*, y^*) = y^*$。

定理 2.1[12]　假定 $A : Q_e \times Q_e \to Q_e$ 是奇异混合单调算子，并且存在一个常数 $\alpha \in (0,1)$，使得

$$A\Big(tx, \frac{y}{t} \ge t^\alpha A(x,y)\Big), \quad \forall\, x, y \in Q_e, \quad t \in (0,1)$$

成立，则 A 存在唯一不动点 $x^* \in Q_e$，此外，对任何 $(x_0, y_0) \in Q_e \times Q_e$，

$$x_n = A(x_{n-1}, y_{n-1}), \quad y_n = A(y_{n-1}, x_{n-1}), \quad n = 1, 2, \cdots,$$

满足 $x_n \to x^*$，$y_n \to x^*$，其中 $\|x_n - x^*\| = o(1 - r^{\alpha^n})$，$\|y_n - x^*\| = o(1 - r^{\alpha^n})$；$r \in (0,1)$，$r$ 是一个与 (x_0, y_0) 有关的常数。

定理 2.2[11,12]　假定 $A : Q_e \times Q_e \to Q_e$ 是奇异混合单调算子，并且存在一个常数 $\alpha \in (0,1)$，使得

$$A\Big(tx, \frac{y}{t}\Big) \ge t^\alpha A(x,y), \quad \forall\, x, y \in Q_e, \quad t \in (0,1)$$

成立，如果 x_λ^* 是方程 $A(x, x,) = \lambda x$ 中 Q_e 的唯一解，那么 $\|x_\lambda^* - x_{\lambda_0}^*\| \to 0$，$(\lambda \to \lambda_0)$。如果 $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$，那么 $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ 蕴含着 $x_{\lambda_1}^* \ge x_{\lambda_2}^*$，$x_{\lambda_1}^* \ne x_{\lambda_2}^*$ 且

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \|x_\lambda^*\| = 0, \quad \lim_{\lambda \to 0^+} \|x_\lambda^*\| = +\infty.$$

3　主要结论

这一节我们将讨论奇异边值问题 (1) 正解的存在唯一性。现在我们用 $G : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0, +\infty)$ 表示边值问题 (1) 的 Green 函数。众所周知

$$G(t,s) = \frac{1}{6} \begin{cases} t^2(1-s)^2(3s - t - 2ts), & 0 \le t \le s \le 1, \\ s^2(1-t)^2(3t - s - 2ts), & 0 \le s \le t \le 1. \end{cases}$$

引理 3.1　$\frac{1}{3}e(t)e(s) \le G(t,s) \le e(t)$ 和 $G(t,s) \le e(s)$，这里 $e(t) = t^2(1-t)^2 t$，$s \in [0,1]$。

引理 3.2　问题 (1) 有正解当且仅当

$$x(t) = \lambda \int_0^1 G(t,s) f(s, x(s)) \mathrm{d}s, \quad t \in [0,1],$$

有正解。

通过使用引理 3.1 和引理 3.2，问题 (1) 的每一个解都满足

$$x(t) = \lambda \int_0^1 G(t,s) f(s, x(s)) \mathrm{d}s \le \lambda \int_0^1 e(s) f(s, x(s)) \mathrm{d}s, \quad t \in [0,1],$$

因此

$$\|x\| \le \lambda \int_0^1 G(t,s) f(s, x(s)) \mathrm{d}s \le \lambda \int_0^1 e(s) f(s, x(s)) \mathrm{d}s,$$

并且

$$\begin{aligned} x(t) &= \lambda \int_0^1 G(t,s) f(s, x(s)) \mathrm{d}s \\ &\ge \frac{1}{3} e(t) \lambda \int_0^1 e(s) f(s, x(s)) \mathrm{d}s \ge \frac{1}{3} e(t) \|x\|, \quad t \in [0,1]. \end{aligned}$$

令 $P=\{x\in C[0,1]\mid x(t)\geq 0,\ \forall\, t\in[0,1]\}$。显然，$P$ 是 Banach 空间 $C[0,1]$ 的一个正规锥。定义算子 $T:C([0,1],[0,+\infty))\to C([0,1],[0,+\infty))$ 如下

$$T(x(t))=\lambda\int_0^1 G(t,s)f(s,x(s))\mathrm{d}s,\quad t\in[0,1]. \tag{2}$$

显然，x 是方程 (1) 的解当且仅当 x 是算子 T 的不动点。

定理 3.1 假如存在 $\alpha\in(0,1)$ 使得

$$g(tx)\geq t^{\alpha}g(x),\quad h(t^{-1}x)\geq t^{\alpha}h(x), \tag{3}$$

对所有 $t\in(0,1)$ 和 $x>0$ 成立，并且 $q\in C((0,1),(0,\infty))$ 满足

$$\int_0^1 t^{-2\alpha}(1-t)^{-2\alpha}q(t)\mathrm{d}t<+\infty.$$

那么方程 (1) 有唯一的一个正解 $x_\lambda^*(t)$。如果 $0<\lambda_1<\lambda_2$，则 $x_{\lambda_1}^*\leq x_{\lambda_2}^*$，$x_{\lambda_1}^*\neq x_{\lambda_2}^*$。进一步，如果 $\alpha\in(0,\frac{1}{2})$，则有

$$\lim_{\lambda\to 0^+}\|x_\lambda^*\|=0,\quad \lim_{\lambda\to+\infty}\|x_\lambda^*\|=+\infty.$$

证明 根据条件 (3) 成立，有

$$h\Big(\frac{1}{t}\Big)\geq t^{\alpha}h(1),\quad h(tx)\leq\frac{1}{t^{\alpha}}h(x),\quad h(t)\leq\frac{1}{t^{\alpha}}h(1),\quad t\in(0,1),\quad x>0, \tag{4}$$

$$g(tx)\geq t^{\alpha}g(x),\quad g(t)\geq t^{\alpha}g(1),\quad g(x)\leq x^{\alpha}g(1),\quad t\in(0,1),\quad x>0 \tag{5}$$

成立。

令 $e(t)=t^2(1-t)^2$，$t\in[0,1]$，很明显 $\|e\|\leq 1$。现在我们令

$$Q_e=\Big\{x\in P\,\Big|\,\frac{1}{M}e(t)\leq x(t)\leq Me(t),\ t\in(0,1)\Big\}, \tag{6}$$

这里 $M>1$ 的选择满足

$$\begin{aligned}M\ >\ \max\Big\{&\Big[\lambda g(1)\int_0^1 q(s)\mathrm{d}s+\lambda h(1)\int_0^1 q(s)e^{-\alpha}(s)\mathrm{d}s\Big]^{\frac{1}{1-\alpha}};\\&\Big[\lambda g(1)\int_0^1 \mathrm{e}^{1+\alpha}(\mathrm{s})(s,s)q(s)\mathrm{d}s+\lambda h(1)\int_0^1 e(s)q(s)\mathrm{d}s\Big]^{-\frac{1}{1-\alpha}}\Big\}.\end{aligned} \tag{7}$$

首先，对任何 $x,y\in Q_e$，从 (6) 我们有

$$g(x(t))\leq g(Me(t))\leq g(M)\leq M^{\alpha}g(1),\quad h(y(t))\leq h\Big(\frac{1}{M}\mathrm{e}(t)\Big)\leq M^{\alpha}e^{-\alpha}(t)h(1), \tag{8}$$

$$g(y(t))\geq g\Big(\frac{1}{M}e(t)\Big)\geq M^{-\alpha}e^{\alpha}(t)g(1),\quad h(x(t))\geq h(Me(t))\geq h(M)\geq M^{-\alpha}h(1) \tag{9}$$

成立。

关于任意的 $x,y\in Q_e$，定义算子

$$T(x,y)(t)=\lambda\int_0^1 G(t,s)q(s)(g(x(s))+h(y(s)))\mathrm{d}s,\quad t\in[0,1].$$

我们先来说明 $T: Q_e \times Q_e \to Q_e$。对任何 $x, y \in Q_e$，由 (8) 可以得到

$$\begin{aligned} T(x,y)(t) &\le \lambda e(t)\Big[M^{\alpha} g(1)\int_0^1 q(s)\mathrm{d}s + M^{\alpha} h(1)\int_0^1 q(s)\mathrm{e}^{-\alpha}(s)\mathrm{d}s\Big] \\ &\le M^{\alpha} e(t)\Big[\lambda g(1)\int_0^1 q(s)\mathrm{d}s + \lambda h(1)\int_0^1 q(s)\mathrm{e}^{-\alpha}(s)\mathrm{d}s\Big] \\ &\le Me(t), \quad t\in[0,1]. \end{aligned}$$

另一方面，由 (9) 可以得到

$$\begin{aligned} T(x,y)(t) &\ge \lambda e(t)\Big[M^{-\alpha} g(1)\int_0^1 e^{1+\alpha}(s)G(s,s)q(s)\mathrm{d}s + M^{-\alpha} h(1)\int_0^1 e(s)q(s)\mathrm{d}s\Big] \\ &\ge M^{-\alpha} e(t)\Big[\lambda g(1)\int_0^1 e^{1+\alpha}(s)G(s,s)q(s)\mathrm{d}s + \lambda h(1)\int_0^1 e(s)q(s)\mathrm{d}s\Big] \\ &\ge \frac{1}{M}e(t), \quad t\in[0,1]. \end{aligned}$$

所以，T 的定义有意义，并且 $T(Q_e \times Q_e) \subset Q_e$。接下来，对任何 $l \in (0,1)$，有

$$\begin{aligned} T(lx, l^{-1}y)(t) &\ge \lambda\int_0^1 G(t,s)q(s)\big[l^{\alpha} g(x(s)) + l^{\alpha} h(y(s))\big]\mathrm{d}s \\ &= l^{\alpha} A_{\lambda}(x,y)(t), \quad t\in[0,1]. \end{aligned}$$

成立。

因此定理2.1和定理2.2的条件都成立。即存在唯一的一个 $x_\lambda^* \in Q_e$ 使得 $T(x_\lambda^*, x_\lambda^*) = x_\lambda^*$ 成立。且对给定的 $\lambda > 0$, x_λ^* 是方程 (1) 的唯一正解。进一步，定理2.2意味着：如果 $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ 成立，那么 $x_{\lambda_1}^*(t) \le x_{\lambda_2}^*(t)$, $x_{\lambda_1}^*(t) \ne x_{\lambda_2}^*(t)$ 成立。并且，如果还有 $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$，则

$$\lim_{\lambda\to 0^+}\|x_\lambda^*\| = 0, \quad \lim_{\lambda\to +\infty}\|x_\lambda^*\| = +\infty.$$

例 考虑奇异边值问题 $x''''(t) + \lambda(\mu x^a(t) + x^{-b}(t)) = 0$, $t\in[0,1]$, $x(0) = x'(0) = x'(1) = x(1) = 0$，这里 $\lambda, a, b > 0$, $\mu \ge 0$, $\max\{a,b\} < \dfrac{1}{2}$。

应用定理3.1，令

$$\alpha = \max\{a,b\} < \frac{1}{2}, \quad q(t) = 1, \quad g(x) = \mu x^a, \quad h(x) = x^{-b},$$

则

$$g(tx) \ge t^{\alpha} g(x), \quad h(t^{-1}) \ge t^{\alpha} h(x), \quad \int_0^1 [s(1-s)]^{-2\alpha}\mathrm{d}s < +\infty.$$

成立。因此定理3.1的所以条件都满足。我们知道方程有唯一的正解 $x_\lambda^*(t)$。另外，$0 < \lambda_1 < \lambda_2$ 蕴含着 $x_{\lambda_1}^* \le x_{\lambda_2}^*$，$x_{\lambda_1}^* \ne x_{\lambda_2}^*$。并且

$$\lim_{\lambda\to 0^+}\|x_\lambda^*\| = 0, \quad \lim_{\lambda\to +\infty}\|x_\lambda^*\| = +\infty.$$

参考文献:

[1] Ma R Y, Tisdell C C. Positive solution of singular sublinear fourth-order boundary value problem[J]. Applicable Analysis, 2005, 84(12): 1199-1220
[2] Yao Q L. Positive solution for eigenvalue problems of fourth-order elastic beam equations[J]. Applied Mathematics Letters, 2004, 17: 237-243
[3] Zhang X G, Liu L S. Positive solutions of fourth-order multi-point boundary value problems with bending term[J]. Applied Mathematics and Computation, 2007, 194(2): 321-332
[4] Bai Z B, Huang B J, Ge W G. The iterative solutions for some fourth-order p-Laplace equation boundary value problems[J]. Applied Mathematics Letters, 2006, 19(1): 8-14
[5] Yao Q L. Existence and multiplicity of positive solutions to a singular elastic beam equation rigidly fixed at both ends[J]. Nonlinear Analysis: TMA, 2008, 69: 2683 - 2694
[6] Bo Y. Estimates of positive solutions to a boundary value problem for the beam equation[J]. Comm Math Anal, 2007, 2(1): 13-21
[7] 刘炳妹，刘立山. 二阶方程组解的存在唯一性[J]. 工程数学学报，2007, 24(4): 757-760
[8] 马巧珍. 一类四阶半正边值问题正解的存在性[J]. 工程数学学报，2002, 19(3): 133-136
[9] 柴玉珍，张建文，李庆士. 具阻尼项非线性梁方程的整体解[J]. 工程数学学报，2008, 25(1): 62-66
[10] Yuan C J, Jiang D Q, O'Regan Donal. Existence and uniqueness of solutions for singular fourth-order nonlinear singular continuous and discrete boundary value problems[J]. Applied Mathematics and Computation, 2008, 203: 194-201
[11] Lin X N, Jiang D Q, Li X Y. Existence and uniqueness of solutions for singular $(k, n-k)$ conjugate boundary value problems[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2006, 52: 375-382
[12] 郭大钧. 非线性分析中的序方法[M]. 济南：山东科学技术出版社，2000

The Existence and Uniqueness of Positive Solutions to the Singular Elastic Beam Equation Rigidly Fixed at Both Ends

YANG Dong-hui

(Heilongjiang Northeast Coal Mine Equipment Lease Company, Harbin 150001)

Abstract: By using a fixed point theorem of mixed monotone operators in cone, this paper studied a fourth-order nonlinear singular boundary value problem, namely a class of elastic beam equation. In mechanics, the equation describes the deflection of an elastic beam rigidly fixed at both ends. The existence and uniqueness of positive solutions are established for the elastic beam equation where the nonlinear term is mixed monotone. An example is presented to demonstrate the application of our main result.

Keywords: boundary value problem; mixed monotone operators; fixed point theorem; elastic beam equation; uniqueness